Проблемы физики, математики и техники, № 1 (18), 2014

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНЕЧНЫХ РАСЩЕПЛЯЕМЫХ ГРУПП

С.Ф. Каморников

Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Гомель, Беларусь

ON ONE CLASS OF FINITE SPLITTABLE GROUPS

S.F. Kamornikov

Gomel Branch of International University «MITSO», Gomel, Belarus

Для локальной формации $\mathfrak{F}$ развивается теорема Л.А. Шеметкова о дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала конечной разрешимой группы.

Ключевые слова: *конечная группа, формация, корадикал, дополняемая подгруппа, локальная формация.*

The L.A. Shemetkov's theorem on the complementability of $\mathfrak{F}$-residual of finite soluble group is developed for a local formation $\mathfrak{F}$.

Keywords: *finite group, formation, residual, complement, local formation.*

Введение

Понятие $\mathfrak{F}$-корадикала группы является одним из центральных в теории формаций конечных групп. Интерес к нему обусловлен следующими двумя обстоятельствами.

1. Понятие $\mathfrak{F}$-корадикала лежит в основе определения целого ряда ключевых объектов теории групп. В частности, оно является базой понятия $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппы и, следовательно, формирует направления, связанные с изучением ряда специальных классов формаций (формаций с условием Виландта, гиперрадикальных и сверхрадикальных формаций [1]–[3]).

2. Понятие $\mathfrak{F}$-корадикала, характеризуя степень вхождения группы в формацию $\mathfrak{F}$, инициировало исследование целого ряда важных проблем теории формаций, одна из которых связана с существованием в группе дополнений к $\mathfrak{F}$-корадикалу.

Начало исследованию проблемы дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала ($\mathfrak{F}$ – насыщенная формация) положила следующая теорема, принадлежащая Хигмену, Картеру, Хоуксу и Шульту.

***Теорема* 0.1** [4]–[6]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и G – конечная группа, $\mathfrak{F}$-корадикал которой является абелевым. Тогда $\mathfrak{F}$-корадикал группы G дополняем в G и любые два дополнения к $\mathfrak{F}$-корадикалу сопряжены. Кроме того, каждое дополнение $\mathfrak{F}$-корадикала одновременно является $\mathfrak{F}$-нормализатором и $\mathfrak{F}$-проектором группы G.*

Замечательное развитие теорема 0.1 получила в работах Л.А. Шеметкова.

***Теорема* 0.2** [7]–[8]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и G – конечная группа, в которой все силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-корадикала являются абелевыми. Тогда $\mathfrak{F}$-корадикал группы G дополняем в G.*

Как отмечено в [9], условие абелевости силовских подгрупп из $\mathfrak{F}$-корадикала группы в теореме 0.2 без введения дополнительных ограничений на группу G ослабить нельзя. В данной работе такое ограничение связано с рассмотрением разрешимой группы G, а прогресс в развитии теоремы 0.2 достигается за счет прямой редукции к теореме 0.1.

Основная цель данной работы – доказательство следующей теоремы 0.3, ослабляющей главное условие теоремы 0.2 до условия абелевости силовских подгрупп специальных факторов $\mathfrak{F}$-корадикала. Отметим, что центральная идея работы частично перекликается с подходами, нашедшими отражение в работе Картера [10].

***Теорема* 0.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, G – конечная разрешимая группа. Если $m(G)=m$ – длина $\mathfrak{F}$-ряда группы G и для любого $i=1,2,\dots,m$ факторгруппа $G^{\mathfrak{N}^{i-1}\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{N}^{i}\mathfrak{F}}$ является абелевой, то найдутся такие подгруппы $H_0, H_1, \dots, H_m$, что группа G представима в виде $G=H_mH_{m-1}\dots H_1H_0$, причем для любых $k,l\in\{0,1,2,\dots,m\}$ таких, что $k>l$, справедливы утверждения*:

1) $H_kH_{k-1}\dots H_{l+1}=(H_kH_{k-1}\dots H_1H_0)^{\mathfrak{N}^{l}\mathfrak{F}}$;

2) $H_lH_{l-1}\dots H_1H_0$ – $\mathfrak{N}^{l}\mathfrak{F}$*-нормализатор подгруппы* $H_kH_{k-1}\dots H_1H_0$;

3) $H_kH_{k-1}...H_{l+1} \cap H_lH_{l-1}...H_1H_0 = 1$;

4) $H_l \subseteq N_G(H_k)$;

5) H_k *– неединичная абелева группа для всех* $k > 0$;

6) $H_k \cap H_l = 1$;

7) $H_mH_{m-1}...H_{l+1} = G^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}}$;

8) $H_lH_{l-1}...H_1H_0$ – $\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}$*-нормализатор группы* G;

9) $G^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}} \cap H_lH_{l-1}...H_1H_0 = 1$.

Из теоремы 0.3, в частности, следует, что в разрешимой группе с абелевыми силовскими подгруппами из $\mathfrak{F}$-корадикала на самом деле имеет место не просто дополняемость $\mathfrak{F}$-корадикала, а определенная «тотальная» расщепляемость.

1 Основные определения и предварительные результаты

В данной работе под группой всегда понимается конечная разрешимая группа. Используются определения и обозначения, принятые в [11]–[12].

Напомним, что *формация* – это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если из включения $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация, то через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается пересечение всех тех нормальных подгрупп N группы G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$ (подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ называется $\mathfrak{F}$*-корадикалом* группы G).

Пусть $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп. Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$*-проектором*, если выполняются следующие условия:

1) $H \in \mathfrak{F}$;

2) из $H \subseteq U \subseteq G$ и $U/U_0 \in \mathfrak{F}$ всегда следует $HU_0 = U$.

Пусть $\mathbf{P}$ – множество всех простых чисел. Тогда функция

$$f : \mathbf{P} \to \{\text{формации конечных групп}\}$$

называется *формационной функцией*.

Для формационной функции f главный фактор A/B группы G называется f*-центральным* (f*-эксцентральным*), если

$$G/C_G(A/B) \cong \mathrm{Aut}(A/B) \in f(p)$$

для всех простых $p \in \pi(A/B)$ (соответственно $G/C_G(A/B)$ не принадлежит $f(p)$ хотя бы для одного простого числа $p \in \pi(A/B)$). Класс групп $\mathfrak{F} = LF(f)$ называется *локальной формацией*, если он состоит из всех групп G таких, что либо $G = 1$, либо $G \neq 1$ и любой главный фактор A/B группы G является f-центральным. При этом говорят, что локальная формация $\mathfrak{F}$ *определяется с помощью формационной функции* f, а f *– локальное определение* формации $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{G}_p$ – класс всех p-групп, f – формационная функция и $\mathfrak{F} = LF(f)$. Тогда f называется:

(а) *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \mathrm{P}$;

(в) *полной*, если $f(p) = \mathfrak{G}_p f(p)$ для всех $p \in \mathrm{P}$;

(с) *канонической*, если она является полной и внутренней.

Как показано в ([11], теорема IV.3.7), для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ существует единственная каноническая формационная функция f такая, что $\mathfrak{F} = LF(f)$. Эта функция называется *каноническим локальным определением* формации $\mathfrak{F}$.

Следуя определению 5.5 из [12], главный фактор H/K будем называть $\mathfrak{F}$*-центральным* ($\mathfrak{F}$*-эксцентральным*), если H/K f-централен (соответственно f-эксцентрален) для некоторого внутреннего локального определения f формации $\mathfrak{F}$.

Отметим, что на основании теоремы Гашюца – Любезедер – Шмида ([11], теорема IV.4.6) формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной тогда и только тогда, когда она локальна. Отсюда, в частности, следует, что для любой насыщенной формации $\mathfrak{F}$ существует каноническое локальное определение f такое, что $\mathfrak{F} = LF(f)$.

Дадим теперь определение $\mathfrak{F}$-нормализатора произвольной конечной группы для случая, когда $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация.

Нормальная подгруппа R группы G называется $\mathfrak{F}$*-предельной нормальной подгруппой*, если $R/R \cap \Phi(G)$ является $\mathfrak{F}$-эксцентральным главным фактором группы G. Максимальная подгруппа M группы G называется $\mathfrak{F}$*-критической* в G, если в G найдется такая $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа R, что $MR = G$. Подгруппа H называется $\mathfrak{F}$*-нормализатором* группы G, если $H \in \mathfrak{F}$ и существует максимальная цепь

$$H = H_0 \subset H_1 \subset ... \subset H_n = G \ (n \geq 0),$$

в которой подгруппа H_{i-1} $\mathfrak{F}$-критична в H_i для всех $i = 1, 2, ..., n$. По определению, каждая группа G обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}$-нормализатором.

Пусть $\pi(G)$ – множество всех простых делителей порядка группы G. Система Σ холловых подгрупп разрешимой группы G называется *холловой системой* группы G, если выполняются следующие два условия:

1) для любого подмножества π множества $\pi(G)$ система Σ содержит в точности одну холлову π-подгруппу группы G;

2) если H и K – подгруппы из Σ, то $HK = HK$.

В случае разрешимой группы G для любого $\mathfrak{F}$-нормализатора H ($\mathfrak{F}$ – насыщенная формация) найдется такая холлова система Σ (см., например, [11]), что

$$H = G_{\pi(\mathfrak{F})} \cap (\bigcap_{p\in\pi(\mathfrak{F})} N_G(G_{p'} \cap G^{f(p)})),$$

где $\pi(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G\in\mathfrak{F}} \pi(G)$, f – каноническое локальное определение формации $\mathfrak{F}$ и $G_{p'} \in \Sigma$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{F})$. В частности, если $\mathfrak{F}$ – формация всех нильпотентных групп, то $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G – это ее некоторый системный нормализатор.

Понятие $\mathfrak{F}$-корадикала лежит в основе определения произведения формаций. Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ – непустые формации. Тогда класс $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2$ всех тех групп G, для которых $G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1$, называется *произведением* формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Произведение нескольких формаций $\mathfrak{F}_1\mathfrak{F}_2...\mathfrak{F}_n$ и *n-ая степень* $\mathfrak{F}^n$ формации $\mathfrak{F}$ определяются как результат последовательного умножения (при этом полагается, что $\mathfrak{F}^0$ – единичная формация).

Центральное место в работе занимает понятие $\mathfrak{F}$-ряда.

Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. Обозначим через $m(G)$ наименьшее целое число m, для которого $G \in \mathfrak{N}^m\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп. При этом полагаем, что $m(G) = 0$ тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{F}$. Из разрешимости группы G следует, что $m(G)$ совпадает с нильпотентной длиной $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ группы G.

Следуя [11], ряд подгрупп

$$f:\ G = G_m \supset G_{m-1} \supset ... \supset G_1 \supset G_0 \supseteq 1$$

будем называть *$\mathfrak{F}$-рядом*, если G_i – $\mathfrak{N}^i\mathfrak{F}$-проектор группы G_{i+1} для любого $i = 0,1,2,...,m-1$. Число $m(G)$ называется *длиной* $\mathfrak{F}$-ряда группы G.

***Замечание* 1.1.** Так как $G \notin \mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}$-проектор группы G – собственная подгруппа группы G. А так как подгруппа G_{m-1} покрывает факторгруппу $G / G^{\mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}}$, то отсюда следует, что $G_{m-1} \in \mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{N}^{m-2}\mathfrak{F}$. Далее индукцией по длине ряда f легко устанавливается, что G_{i-1} – собственная подгруппа группы G_i для всех $i = 1,2,...,m$ (подгруппа G_0 может быть единичной).

***Замечание* 1.2.** Ввиду теоремы V.4.3 из [11] подгруппа G_i является $\mathfrak{N}^i\mathfrak{F}$-нормализатором группы G для всех $i = 0,1,2,...,m$. В частности, G_0 – $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G.

2 Доказательство теоремы 0.3

Рассмотрим $\mathfrak{F}$-ряд

$$f:\ G = G_m \supset G_{m-1} \supset ... \supset G_1 \supset G_0 \supseteq 1$$

группы G. Обозначим $H_i = G_i^{\mathfrak{N}^{i-1}\mathfrak{F}}$ для всех $i \in \{1,2,...,m\}$, а также положим $H_0 = G_0$. Отсюда, в частности, следует, что $H_m = G_m^{\mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}}$.

Будем вести индукцию по величине $m(G)$. Ясно, что при $m(G) = 0$ теорема выполняется. Значит, $m(G) > 0$. Предположим, что теорема верна для всех тех групп, длина $\mathfrak{F}$-ряда которых меньше m.

Так как ввиду условия теоремы 0.3 $\mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}$-корадикал группы G является абелевым, то на основании теоремы 0.1 подгруппа G_{m-1} является дополнением в G подгруппы $H_m = G^{\mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}}$, т. е. $G = H_mG_{m-1}$ и $H_m \cap G_{m-1} = 1$.

Пусть $k < m$. Тогда, очевидно, $H_m \subseteq G^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}$ и

$$G / G^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}} = G_{m-1}H_m / G^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}} \cong$$
$$\cong G_{m-1} / G_{m-1} \cap G^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}^k\mathfrak{F}.$$

Следовательно, $G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}$. С другой стороны,

$$G / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}H_m = G_{m-1}H_m / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}H_m \cong$$
$$\cong G_{m-1} / G_{m-1} \cap G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}H_m =$$
$$= G_{m-1} / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}(G_{m-1} \cap H_m) = G_{m-1} / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}.$$

Поэтому $G^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}} \subseteq G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}H_m$. На основании тождества Дедекинда из равенства $H_m \cap G_{m-1} = 1$ имеем

$$G^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}} \cap G_{m-1} \subseteq G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}H_m \cap G_{m-1} =$$
$$= G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}(H_m \cap G_{m-1}) = G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}.$$

Следовательно, $G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}} \cap G_{m-1}$ и

$$G^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}} = H_m(G^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}} \cap G_{m-1}) = H_mG_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}$$

для всех $k = 0,1,2,...,m-1$.

Поэтому имеем

$$G^{\mathfrak{N}^{k-1}\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}} = G_{m-1}^{\mathfrak{N}^{k-1}\mathfrak{F}}H_m / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}H_m \cong$$
$$\cong G_{m-1}^{\mathfrak{N}^{k-1}\mathfrak{F}} / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^{k-1}\mathfrak{F}} \cap G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}H_m =$$
$$= G_{m-1}^{\mathfrak{N}^{k-1}\mathfrak{F}} / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}(G_{m-1}^{\mathfrak{N}^{k-1}\mathfrak{F}} \cap H_m) = G_{m-1}^{\mathfrak{N}^{k-1}\mathfrak{F}} / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}}.$$

Отсюда следует, что для любого $k = 0, 1, 2, ..., m-1$ факторгруппа $G_{m-1}^{\mathfrak{N}^{k-1}\mathfrak{F}} / G_{m-1}^{\mathfrak{N}^{k}\mathfrak{F}}$ является абелевой, т. е. все условия теоремы 0.3 для группы G_{m-1} выполняются.

Так как $m(G_{m-1}) = m-1 < m,$ то ввиду предположения индукции для группы G_{m-1} теорема 0.3 верна. Кроме того, по определению

$$G_{m-1} \supset G_{m-2} \supset ... \supset G_1 \supset G_0 \supseteq 1$$

– $\mathfrak{F}$-ряд группы G_{m-1}. Поэтому группа G_{m-1} представима в виде $G_{m-1} = H_{m-1}...H_1H_0,$ причем для любых $k, l \in \{0, 1, 2, ..., m-1\}$ таких, что $k > l,$ справедливы утверждения:

1) $H_kH_{k-1}...H_{l+1} = (H_kH_{k-1}...H_1H_0)^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}};$

2) $H_lH_{l-1}...H_1H_0$ – $\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}$-нормализатор подгруппы $H_kH_{k-1}...H_1H_0;$

3) $H_kH_{k-1}...H_{l+1} \cap H_lH_{l-1}...H_1H_0 = 1;$

4) $H_l \subseteq N_{G_{m-1}}(H_k);$

5) H_k – неединичная абелева группа для всех $k > 0;$

6) $H_k \cap H_l = 1.$

На основании определения подгруппы H_i ($i \in \{0, 1, 2, ..., m\}$) справедливо равенство

$$H_kH_{k-1}...H_1H_0 = G_k$$

и, в частности, равенство $G_{m-1} = H_{m-1}...H_1H_0.$ Как показано выше, $G^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}} = H_mG_{m-1}^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}}.$ Кроме того, подгруппа $H_m = G^{\mathfrak{N}^{m-1}\mathfrak{F}}$ нормальна в группе $G.$ Поэтому справедливо равенство

$$G^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}} = H_m(H_{m-1}...H_{l+1}) = H_mH_{m-1}...H_{l+1},$$

т. е. $H_mH_{m-1}...H_{l+1} = G^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}} = (H_mH_{m-1}...H_1H_0)^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}}.$

Тот факт, что подгруппа $H_lH_{l-1}...H_1H_0$ является $\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}$-нормализатором группы $G,$ следует из равенства $H_lH_{l-1}...H_1H_0 = G_l$ и замечания 1.2.

Сравнивая порядки групп G и $H_mG_{m-1}^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}}G_l,$ из равенств $H_m \cap G_{m-1} = 1,$ $G_{m-1}^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}} \cap G_l = 1$ и $G = H_m(G_{m-1}^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}}G_l) = (H_mG_{m-1}^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}})G_l$ получаем, что

$$H_mH_{m-1}...H_{l+1} \cap H_lH_{l-1}...H_1H_0 = G^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}} \cap G_l = 1.$$

Тот факт, что H_k – неединичная абелева группа для всех $k = 1, 2, ..., m,$ следует из условия теоремы, ее справедливости для группы G_{m-1} и изоморфизма

$$G^{\mathfrak{N}^{k-1}\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{N}^{k}\mathfrak{F}} =$$
$$= (H_mH_{m-1}...H_1H_0)^{\mathfrak{N}^{k-1}\mathfrak{F}} / (H_mH_{m-1}...H_1H_0)^{\mathfrak{N}^{k}\mathfrak{F}} =$$
$$= H_mH_{m-1}...H_k / H_mH_{m-1}...H_{k+1} \cong$$
$$\cong H_k / H_k \cap H_mH_{m-1}...H_{k+1} \cong H_k.$$

Равенство $H_k \cap H_l = 1$ для всех $l < m$ следует из справедливости теоремы для группы G_{m-1} и равенства $H_m \cap G_{m-1} = 1.$

Теорема доказана.

3 Некоторые следствия

Теорема 0.3 включает в себя многие известные результаты о дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала разрешимой группы (в частности, если $m(G) = 1,$ то она включает отмеченную выше теорему Хигмена, Картера, Хоукса и Шульта из [4]–[6]).

***Следствие* 3.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, G – разрешимая группа. Пусть $m(G) = m$ и для любого $i = 1, 2, ..., m$ факторгруппа $G^{\mathfrak{N}^{i-1}\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{N}^{i}\mathfrak{F}}$ абелева. Если*

$$G = G_m \supset G_{m-1} \supset ... \supset G_1 \supset G_0 \supseteq 1$$

– $\mathfrak{F}$-ряд группы G, то для любого $k = 0, 1, 2, ..., m$ подгруппа G_k является дополнением $\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}$-корадикала группы G.

В случае разрешимой группы условие абелевости силовских подгрупп $\mathfrak{F}$-корадикала группы приводит к ее «тотальной» расщепляемости.

***Следствие* 3.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, G – разрешимая группа, у которой все силовские подгруппы из $G^{\mathfrak{F}}$ абелевы. Если $G = G_m \supset G_{m-1} \supset ... \supset G_1 \supset G_0 \supseteq 1$ – $\mathfrak{F}$-ряд группы G, то найдутся такие подгруппы H_0, H_1, $...,$ H_m, что группа G представима в виде $G = H_mH_{m-1}...H_1H_0$, причем для любых $k, l \in \{0, 1, 2, ..., m\}$ таких, что $k > l$, справедливы утверждения*:

1) $H_kH_{k-1}...H_{l+1} = (H_kH_{k-1}...H_1H_0)^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}};$

2) $H_lH_{l-1}...H_1H_0$ *– $\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}$-нормализатор подгруппы* $H_kH_{k-1}...H_1H_0;$

3) $H_kH_{k-1}...H_{l+1} \cap H_lH_{l-1}...H_1H_0 = 1;$

4) $H_l \subseteq N_G(H_k);$

5) H_k *– неединичная абелева группа для всех* $k > 0;$

6) $H_k \cap H_l = 1;$

7) $H_mH_{m-1}...H_{l+1} = G^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}};$

8) $H_lH_{l-1}...H_1H_0$ *– $\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}$-нормализатор группы* $G;$

9) $G^{\mathfrak{N}^l\mathfrak{F}} \cap H_lH_{l-1}...H_1H_0 = 1.$

В случае разрешимой группы при $l = 0$ и $k = m$ следствие 3.2 включает выводы приведенной выше теоремы 2 Л.А. Шеметкова из [7]–[8]. При этом уточняется, что дополнение H_0 к $\mathfrak{F}$-корадикалу группы G является $\mathfrak{F}$-нормализатором группы $G.$

***Следствие* 3.3.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация,* G *– разрешимая группа, у которой все силовские подгруппы из* $G^{\mathfrak{F}}$ *абелевы. Если*

$$G = G_m \supset G_{m-1} \supset \ldots \supset G_1 \supset G_0 \supseteq 1$$

– $\mathfrak{F}$*-ряд группы* G, *то для любого* $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ *подгруппа* G_k *является дополнением* $\mathfrak{N}^k\mathfrak{F}$*-корадикала группы* G.

Отметим также следующий результат Картера, который выводится из теоремы 0.3.

***Следствие* 3.4** [10]. Если G – разрешимая группа и подгруппа $G^{\mathfrak{N}^n}$ является абелевой для некоторого $n \geq 1$, то нормализатор в G силовской системы подгруппы $G^{\mathfrak{N}^{n-1}}$ является дополнением к $G^{\mathfrak{N}^n}$ в G.

Замечание. Можно показать, что в условии теоремы 0.3 требование разрешимости группы G может быть ослаблено до условия разрешимости ее $\mathfrak{F}$-корадикала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каморников*, *С.Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С.Ф. Каморников, М.В. Селькин. – Минск : Беларуская навука, 2003. – 256 с.

2. *Каморников*, *С.Ф.* Критические группы наследственной локальной сверхрадикальной формации / С.Ф. Каморников, В.Н. Тютянов // Проблемы физики, математики и физики. – 2013. – № 2 (15). – С. 66–75.

3. *Каморников*, *С.Ф.* Разрешимые гиперрадикальные формации / С.Ф. Каморников // Проблемы физики, математики и физики. – 2013. – № 4 (17). – С. 55–58.

4. *Higman*, *G.* Complementation of abelian normal subgroups / G. Higman // Publ. Math. Debrecen. – 1956. – Vol. 4. – P. 455–458.

5. *Carter*, *R.* The $\mathfrak{F}$-normalisers of a finite soluble group / R. Carter, T. Hawkes // J. Algebra. – 1967. – Vol. 5, № 2. – P. 175–202.

6. *Shult*, *E.* A note on splitting in solvable groups / E. Shult // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – Vol. 17. – P. 318–320.

7. *Шеметков*, *Л.А.* О формационных свойствах конечных групп / Л.А. Шеметков // ДАН СССР. – 1972. – Т. 204, № 6. – С. 1324–1327.

8. *Шеметков*, *Л.А.* Ступенчатые формации групп / Л.А. Шеметков // Матем. сб. – 1974. – Т. 94, № 4. – С. 628–648.

9. *Шеметков*, *Л.А.* Два направления в развитии теории непростых конечных групп / Л.А. Шеметков // Успехи мат. наук. – 1975. – Т. 30, № 2. – С. 179–198.

10. *Carter*, *R.* Splitting properties of solvable groups / R. Carter // J. London Math. Soc. – 1961. – Vol. 36, № 1. – P. 89–94.

11. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

12. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

Поступила в редакцию 25.11.13.